Familles sommables

17 janvier 2019

1 Produit de Cauchy de deux séries

1.1

Donner un exemple de deux séries convergentes dont le produit de Cauchy diverge.

1.2 Cesaro

Soient $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ trois séries convergentes. On pose $c = a \star b$. Montrer que $C = AB$ en vérifiant que $\sum C_n = \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}$. césaro double

1.3 Cauchy-Mertens

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques convergentes, la première étant absolument convergente. On se propose de montrer que leur série produit de Cauchy $c = a \star b$ converge vers le produit AB de leurs sommes respectives.
a) Montrer que l'on peut suppose $B = 0$.
b) Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} a_k B_{n-k}$ et montrer que cette suite tend vers 0. Conclure.

1.4 Pringsheim

$\mu = \Sigma$

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles décroissant vers 0, et $w = u \star v$. Montrer que $\sum (-1)^{n-1} w_n$ converge ssi la suite w tend vers 0.

$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m+n=k} 1$

$\frac{1}{4}(m+n)^2 \leq m^2 - mn + n^2 \leq (m+n)^2$

2 Sommablilité

partition

$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{(m, n), m+n=k\}$

2.1

Etudier la famille Sommabilité des familles $(\frac{1}{(m+n)^a})_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$, $a > 0$; $(\frac{1}{(m^2 - mn + n^2)^a})$.

2.2

Soit z_n une suite de nombres complexes non nuls telle que, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \neq n$ on ait $|z_n - z_m| \geq 1$. Montrer que, pour $\alpha > 2$, la série $\sum \frac{1}{|z_n|^\alpha}$ converge.

équivalence des normes + estimer le cardinal de $A_N = \{a \in \mathbb{Z}^n / \max|a_i| = N\}$

2.3

On se donne une norme $\|\|$ sur $\mathbf{R}^n$, étudier la sommabilité de la famille $(\frac{1}{\|a\|}^\alpha)$ selon $\alpha > 0$. $\longrightarrow \alpha > n$

$a \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$

3 Identités obtenues par développement

On reverra avec profit la dernière partie du devoir : séries de Dirilchet.

3.1

La fonction *zeta* est celle de Riemann. Calculer $\sum_{n \geq 2} \zeta(n) - 1$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{\phi(n)}{2^n}$$

3.2

La fonction ϕ est l'indicatrice d'Euler.Calculer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\phi(n)}{2^n-1}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\phi(n)}{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

3.3

On désigne par γ la constante d'Euler.

a) Montrer que l'on a : $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}))$.

b) La famille $(\frac{(-1)^k}{kn^k})$, $n \geq 1$, $k \geq 2$ est-elle sommable ? Et si l'on se restreint à $n \geq 2$?

c) Montrer que $\gamma = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k)$.

4 Ensembles de mesure nulle

On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbf{R}$ est *de mesure nulle* lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists (I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \text{ intervalles ouverts de } \mathbf{R},\ \left(A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right) \text{ et } \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} l(I_\lambda) \leq \varepsilon\right)$$

a) Montrer que $\mathbf{Q}$ est de mesure nulle.

b) Montrer que si $(A_p)_{p \in \mathbf{N}}$ est de mesure nulle, alors $\bigcup A_p$ aussi.

c) Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, avec $a < b$. Montrer que $[a, b]$ n'est pas de mesure nulle.

d) Montrer que l'ensemble des réels 3-approchables est de mesure nulle.

famille positive
l'un des groupements CV
donc famille sommable
=> toutes les familles CV